УДК 517.946

М. А. Наумова

ПОТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

Статья посвящена развитию предложенного И. В. Скрыпником метода получения поточечных оценок решений модельных нелинейных задач на случай областей, являющихся некоторым обобщением областей с каналами. Эти оценки важны при изучении усреднений нелинейных граничных задач в последовательности таких областей, а также в других вопросах качественной теории нелинейных уравнений.

В работах [1, 2] развит метод получения поточечных оценок решений модельных нелинейных задач в перфорированных областях. Эти оценки применяются в [1, 2] при изучении усреднений нелинейных граничных задач в последовательности областей с мелкозернистой границей и областей с каналами при изучении локального поведения решений вблизи негладкой границы. Они важны также в других вопросах качественной теории нелинейных уравнений. Данная статья посвящена развитию метода получения поточечных оценок на случай более общих областей.

1. Сформулируем предположения и основной результат работы. Пусть F — замкнутое множество, содержащееся в

$$Q = \{x \in R^n : x' = (x_1, \ldots, x_t), \ |x'| \leqslant d, \ x'' = (x_{t+1}, \ldots, x_n), \ |x''| \leqslant H\},$$

$n - m < t \leqslant n - 1$. Определим при $d < \frac{1}{4}$, $H < \frac{1}{4}$, $d \leqslant H$ функцию $v(x, k)$ как решение задачи

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad x \in \Omega = Q_1 \setminus F, \tag{1}$$

$$u(x) - k\psi_F(x) \in \overset{0}{W}{}^1_m(\Omega) \tag{2}$$

с некоторым числом $m \in [2, t)$. Здесь $k \in R^1$, $Q_1 = \{x \in R^n : |x'| \leqslant 1, |x''| \leqslant 1\}$, ψ_F — функция класса $C_0^\infty(Q_1)$, равная единице на F.

Предполагается далее, что функции $a_j(x, p)$, $j = 1, \ldots, n$, определены при $x \in Q_1$, $p \in R^n$ и удовлетворяют условиям:

а) функции $a_j(x, p)$ непрерывны по p при почти всех $x \in Q_1$, измеримы по x при любом p;

$a_j(x, 0) = 0$ при $x \in Q_1$, $j = 1, \ldots, n$;

б) существуют положительные постоянные γ_1, γ_2, такие, что при всех значениях $x \in Q_1$, $p \in R^n$ выполнены неравенства

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} a_j(x, p) p_j \geqslant \gamma_1 (1 + |p|)^{m-2} |p|^2, \\ |a_j(x, p)| \leqslant \gamma_2 (1 + |p|)^{m-2} |p|, \quad j = 1, \ldots, n, \ m \in [2, t). \end{gathered} \tag{3}$$

При сформулированных предположениях просто доказывается разрешимость задачи (1), (2) в пространстве $W_m^1(\Omega)$. Под решением задачи (1), (2) понимаем функцию $v(x, k) \in \overset{0}{W}{}^1_m(\Omega)$, такую, что $v(x, k) - k\psi_F(x) \in \overset{0}{W}{}^1_m(\Omega)$ и при любых $\varphi(x) \in \overset{0}{W}{}^1_m(\Omega)$ справедливо интегральное тождество

$$\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega a_j\left(x, \frac{\partial}{\partial x} v(x, k)\right) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x)\, dx = 0. \tag{4}$$

Основным результатом статьи является теорема 1.

Теорема 1. Предположим, что выполнены условия а), б). Тогда существует постоянная C, зависящая лишь от n, m, γ_1, γ_2, такая, что для решения задачи (1), (2) имеет место оценка

$$|v(x, k)| \leqslant C|k| \left(\frac{d}{|x'|}\right)^{\frac{t-m}{m-1}}, \quad x \in \Omega. \tag{5}$$

Замечание 1. Элементарно доказывается, что $0 \leqslant \frac{1}{k} v(x, k) \leqslant 1$. Поэтому неравенство (5) представляет интерес при $|x'| > d$.

Замечание 2. В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая $k > 0$, так как при $k < 0$ соответствующие оценки для $v(x, k)$ являются следствием оценок функции $\omega(x, -k) = -v(x, k)$, также являющейся решением задачи вида (1), (2), удовлетворяющей условиям а), б).

2. Вначале получим интегральные оценки функции $v(x, k)$. Определим

$$m_r = \underset{|x'|=r, |x''|\leqslant 1}{\operatorname{vrai\,max}} v(x, k), \quad v_r(x, k) = \max\{v(x, k) - m_r, 0\}, \tag{6}$$

$$E_r = \{x : v(x, k) > m_r\}.$$

Замечание 3. Просто показать, что при $d < r < 1$ множество E_r содержится в $Q_r = \{x : |x'| \leqslant r, |x''| \leqslant 1\}$.

Зафиксируем для дальнейшего четную функцию $\chi(t)$ класса $C_0^\infty(R^1)$, равную единице при $|t| \leqslant \frac{1}{2}$, нулю при $|t| \geqslant 1$, и такую, что $-3 \leqslant \frac{d}{dt} \chi(t) \leqslant 0$

при $t \geqslant 0$. Обозначим $\chi_h(t) = \chi\left(\frac{t}{h}\right)$ для $h > 0$, тогда $\chi_{h_1}(t) \leqslant \chi_{h_2}(t)$ при $h_1 < h_2$. Пусть $\chi_h(x'' - \eta) = \chi\left(\frac{|x'' - \eta|}{h}\right)$, $\eta = (\eta_{t+1}, \dots, \eta_n)$. Будет доказана теорема 2.

Теорема 2. Предположим, что выполнены условия а), б). Тогда существуют постоянные K_1, K_2, зависящие только от n, m, γ_1, γ_2, такие, что при $k > 0$, $d < r < 1$, $K_1 r \leqslant h \leqslant H$, $|\eta| \leqslant 1$, $\eta = (\eta_{t+1}, \dots, \eta_n)$ для решения $v(x, k)$ задачи (1), (2) справедлива оценка

$$\int_{E_r}\left(1 + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 \chi_k^m(x'' - \eta)\,dx \leqslant K_2 h^{n-t}(k - m_r)\,kd^{t-m}(k+d)^{m-2}. \quad (7)$$

Получение (7) начнем с предварительных интегральных оценок. В следующих ниже леммах через $C^{(i)}$, C_j, $i, j = 1, 2\dots$ будем обозначать постоянные, зависящие лишь от n, m, γ_1, γ_2. Далее $\psi_1(x')$ — фиксированная неотрицательная функция, принадлежащая $C_0^\infty(R^t)$, равная нулю при $|x'| \geqslant 2$, единице при $|x'| \leqslant 1$ и такая, что $\left|\frac{\partial}{\partial x'}\psi_1(x')\right| \leqslant 2$. Обозначим $\psi_d(x') = \psi_1\left(\frac{x'}{d}\right)$. Просто проверяются следующие неравенства.

Лемма 1. Предположим, что выполнены условия а), б). Тогда существуют постоянные $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$, такие, что имеют место оценки

$$\int_\Omega\left(1 + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 dx \leqslant C^{(1)}H^{n-t}k^2 d^{t-m}(k+d)^{m-2}, \quad (8)$$

$$\int_{E_r}\left(1 + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 dx \leqslant C^{(2)}k(k - m_r)\,H^{n-t}d^{t-m}(k+d)^{m-2}, \quad (9)$$

$$\int_\Omega\left(1 + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 \psi_d^m(x')\,\chi_h^m(x'' - \eta)\,dx \leqslant C^{(3)}h^{n-t}k^2 d^{t-m}(k+d)^{m-2} \quad (10)$$

при $k > 0$, $d < r < 1$, $d < h < H$, $|\eta| \leqslant 1$, $\eta = (\eta_{t+1}, \dots, \eta_n)$.

Обозначим при $r \in [d, 1]$, $h \in (0, H]$, $|\eta| \leqslant 1$

$$I_r(h, \eta) = \int_{E_r}\left(1 + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 \chi_h^m(x'' - \eta)\,dx, \quad (11)$$

где $v = v(x, k)$ — решение задачи (1), (2).

Лемма 2. Пусть выполнены условия а), б), $k > 0$ и $v(x, k)$ — решение задачи (1), (2). Предположим, что при некоторых $r \in [d, 1]$, $h' \in (0, H]$ выполнено неравенство

$$I_r(h', \eta) \leqslant K(h')^{n-t}\,kd^{t-m}(k - m_r)(k+d)^{m-2}. \quad (12)$$

Тогда при произвольном $h \in \left[r, \frac{h'}{2}\right]$ справедлива оценка

$$I_r(h, \eta) \leqslant C^{(4)}\left\{h^{n-t} + K\left(\frac{r}{h}\right)^2 (h')^{n-t}\right\}k(k - m_r)\,d^{t-m}(k+d)^{m-2}. \quad (13)$$

Для доказательства достаточно подставить в (4)

$$\varphi(x) = v_r(x, k)\chi_h^m(x'' - \eta) - (k - m_r)f(\eta)\psi_d^m(x')\chi_h^m(x'' - \eta),\ f(\eta) = \begin{cases} 1, & |\eta| \leqslant \frac{1}{2} \\ 0, & |\eta| > \frac{1}{2} \end{cases},$$

и провести элементарные преобразования.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Покажем, что постоянные K_1, K_2 можно выбрать в виде

$$K_2 = \max\{2^{n-t}C^{(2)},\ 2^{n-t+1}C^{(4)}\},\ K_1 = \sqrt{K_2 + 1}, \quad (14)$$

где $C^{(2)}$, $C^{(4)}$ — постоянные, определенные в леммах 1, 2.

Определим конечную числовую последовательность $h_j = 2^{-j+1}H$, $j = 1, \ldots, J$, где J удовлетворяет условию $2^{-J}H < K_1 r \leqslant 2^{-J+1}H$. Будем вначале доказывать оценки

$$I_r(h_j, \eta) \leqslant 2^{-(n-t)} K_2 h_j^{n-t} k(k-m_r)\, d^{t-m}(k+d)^{m-2} \tag{15}$$

для $j = 1, \ldots, J$. При $j = 1$ (15) следует из (9). Если (15) справедливо для $j = j_0 - 1$, $2 \leqslant j_0 \leqslant J$, тогда для $j = j_0$ это неравенство следует из леммы 2. Тем самым оценка (15) установлена для $j = 1, \ldots, J$. Для произвольного $h \in [K_1 r, H]$ определим целое число l так, чтобы $2^{-l}H < h < 2^{-l+1}H$. Тогда $1 \leqslant l \leqslant J$ и

$$I_r(h, \eta) \leqslant I_r(h_l, \eta) \leqslant K_2 h^{n-t} k(k-m_r)\, d^{t-m}(k+d)^{m-2},$$

что и доказывает неравенство (7).

3. Пусть теперь μ — произвольное число из интервала $(0, k-m_r)$ и введем обозначения

$$[v_r]_\mu = \min\{v_r(x,k), \mu\},\quad E_{r,\mu} = \{x \in \Omega : 0 \leqslant v(x,k) \leqslant \mu\},$$
$$F_{r,\mu} = \{x \in \Omega : v_r(x,k) > \mu\},\quad I_{r,\mu}(h, \eta) =$$
$$= \int\limits_{E_{r,\mu}} \left(1 + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 \chi_h^m(x'' - \eta)\, dx.$$

Будет доказана теорема 3.

Теорема 3. Предположим, что выполнены условия а), б). Тогда существует постоянная K_3, зависящая лишь от n, m, γ_1, γ_2, такая, что для решения $v(x, k)$ задачи (1), (2) имеет место оценка

$$I_{r,\mu}(h,\eta) \leqslant K_3 \left(\frac{r}{h}\right)^2 I_{r,\mu}(2h, \eta) + \frac{K_3\mu}{(q-1)} \Big\{ h^{n-t} k d^{t-m}(k+d)^{m-2} +$$
$$+ \int\limits_{F_{r,\mu}} \{h^{-m}\mu^{(1-q)(m-1)}[v_r(x,k)]^{q(m-1)} + h^{-2}\mu^{1-q}[v_r(x,k)]^q\}\, \chi_{2h}^m(x''-\eta)\, dx \Big\} \tag{16}$$

при $k > 0$, $1 < q \leqslant m$, $0 < \mu < k - m_r$, $d < r < 1$, $|\eta| \leqslant \frac{1}{2}$, $K_1 r \leqslant h \leqslant H$ с постоянной K_1 из теоремы 2.

Доказательство теоремы 3 просто получается из следующих ниже лемм 3, 4.

Лемма 3. Предположим, что выполнены условия теоремы 3. Тогда с некоторой постоянной $C^{(5)}$ справедлива оценка

$$I_{r,\mu}(h,\eta) \leqslant C^{(5)} \left(\frac{r}{h}\right)^2 I_{r,\mu}(2h,\eta) + C^{(5)} \mu h^{n-t} k d^{t-m}(k+d)^{m-2} +$$
$$+ C^{(5)} \frac{\mu}{h} \int\limits_{F_{r,\mu}} \left(1 + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| \chi_h^{m-1}(x''-\eta)\, dx. \tag{17}$$

Лемма 4. Предположим, что выполнены условия теоремы 3. Тогда с некоторой постоянной $C^{(6)}$ справедлива оценка

$$\int\limits_{F_{r,\mu}} [v_r(x,k)]^{-q} \left(1 + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 \chi_h^m(x''-\eta)\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C^{(6)}\mu^{1-q}}{(q-1)} \Big\{ h^{n-t} k d^{t-m}(k+d)^{m-2} +$$
$$+ \int\limits_{F_{r,\mu}} [h^{-m}\mu^{(1-q)(m-1)}[v_r(x,k)]^{q(m-1)} + h^{-2}\mu^{1-q}[v_r(x,k)]^q]\, \chi_{2h}^m(x''-\eta)\, dx \Big\}. \tag{18}$$

Для доказательства этих лемм нужно использовать неравенства (3), (8), Юнга, Пуанкаре и теорему 2.

При получении поточечных оценок функции $v(x, k)$ используется еще одно просто проверяемое неравенство.

Лемма 5. Предположим, что выполнены условия а), б). Тогда существует постоянная $C^{(7)}$, такая, что для решения $v(x, k)$ задачи (1), (2) справедлива оценка

$$\int\limits_{E_{r,\mu}} \left(1 + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 dx \leqslant C^{(7)} H^{n-t} \mu k d^{t-m} (k+d)^{m-2} \qquad (19)$$

при $k > 0$, $d < r < 1$, $0 < \mu < k - m_r$.

4. Сначала получим предварительную поточечную оценку.

Лемма 6. Пусть выполнены условия а), б), $k > 0$. Тогда при $r \in [2d, 1]$ с некоторыми постоянными $C^{(8)}$, $C^{(9)}$ для решения $v(x, k)$ задачи (1), (2) справедливы оценки

$$m_{2^{-1}r} - m_r \leqslant C^{(8)} k \left(\frac{H}{r}\right)^{\frac{n-t}{m-1}} \left(\frac{d}{r}\right)^{\frac{t-m}{m-1}} \quad \text{при } k > d, \qquad (20)$$

$$m_{2^{-1}r} - m_r \leqslant C^{(9)} k \left(\frac{H}{r}\right)^{n-t} \left(\frac{d}{r}\right)^{t-2} \quad \text{при } k \leqslant d. \qquad (21)$$

Доказательство. Определим числовые последовательности

$$r_j^{(1)} = \frac{r}{4}(1 + 2^{-j}),\ r_j^{(2)} = \frac{r}{4}(3 - 2^{-j}),$$

$$h_{j,h}^{(1)}(\eta) = |\eta| - \frac{h}{8} - (1 - 2^{-j+1}) r,\ h_{j,h}^{(2)}(\eta) = |\eta| + \frac{h}{8} + (1 - 2^{-j+1}) r$$

при $h \leqslant H$, $\eta = (\eta_{t+1}, \ldots, \eta_n)$, $|\eta| \leqslant 1$, $j = 1, 2 \ldots$

В дальнейшем $\psi_j(x')$ — бесконечно-дифференцируемые функции, равные единице на $G_j' = \{x' : r_j^{(1)} \leqslant |x'| \leqslant r_j^{(2)}\}$, нулю вне G_{j+1}' и такие, что $0 \leqslant \psi_j(x') \leqslant 1$, $\left|\frac{\partial}{\partial x'} \psi_j(x')\right| \leqslant \frac{2^{j+4}}{r}$. Определим еще бесконечно-дифференцируемые функции $\chi_{j,h}(x'', \eta)$, равные единице на $G_j'' = \{x'' : h_{j,h}^{(1)} \leqslant |x'' - \eta| \leqslant h_{j,h}^{(2)}\}$, нулю вне G_{j+1}'' и такие, что $0 \leqslant \chi_{j,h}(x'', \eta) \leqslant 1$, $\left|\frac{\partial}{\partial x''} \chi_{j,h}(x'', \eta)\right| \leqslant \frac{2^{j+1}}{r}$. Обозначим $\varphi_{j,h}(x, \eta) = \psi_j(x')\, \chi_{j,h}(x'', \eta)$.

Подставим в (4) $\varphi(x, \eta) = [v_r(x, k)]^{\rho+1} [\varphi_{j,h}(x, \eta)]^{\sigma+m}$, где ρ, σ — произвольные положительные числа. После стандартных преобразований и оценок получим

$$\int\limits_{\Omega} \left(1 + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 [v_r(x, k)]^{\rho} [\varphi_{j,h}(x, \eta)]^{\sigma+m} dx \leqslant C_4 (\sigma + m)^m \times$$
$$\times \int\limits_{\Omega} \left\{ [v_r(x, k)]^{\rho+2} [\varphi_{j,h}(x, \eta)]^{\sigma+m-2} \left(\frac{2^j}{r}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + [v_r(x, k)]^{\rho+m} [\varphi_{j,h}(x, \eta)]^{\sigma} \left(\frac{2^j}{r}\right)^m \right\} dx. \qquad (22)$$

Дальнейшие оценки проводятся по-разному в каждом из следующих четырех вариантов:

$$\mu_{j+1}(h, \eta) > r, \quad k > d, \qquad (23)$$
$$\mu_{j+1}(h, \eta) > r, \quad k \leqslant d, \qquad (24)$$
$$\mu_{j+1}(h, \eta) \leqslant r, \quad k > d, \qquad (25)$$
$$\mu_{j+1}(h, \eta) \leqslant r, \quad k \leqslant d, \qquad (26)$$

где

$$\mu_{j+1}(h, \eta) = \operatorname*{vrai\,max}_{x \in G_{j+1}(h,\eta)} v_r(x, k), \qquad (27)$$

$$G_{j+1}(h, \eta) = \{x = (x', x'') : x' \in G_{j+1}',\quad x'' \in G_{j+1}''\}.$$

Для получения оценок (20), (21) осталось оценить интеграл в правой части (22), используя лемму 1.3 гл. 8 [1] по-разному в каждом из случаев (23) — (26) и применить затем леммы 1.4, 1.5 гл. 8 [1].

Лемма 7. Предположим, что для решения $v(x, k)$ задачи (1), (2) при $k > 0$, $4d \leqslant r \leqslant R \leqslant 1$ выполнено неравенство

$$m_{2^{-1}r} - m_r \leqslant k \sum_{i=1}^{I} \frac{A_i}{r^{\lambda_i}} \tag{28}$$

с некоторыми положительными постоянными A_i, λ_i. Тогда имеет место оценка

$$v(x, k) \leqslant C^{(10)} k \sum_{i=1}^{I} \frac{A_i}{|x'|^{\lambda_i}} + m_r \quad \text{при } 8d \leqslant |x'| \leqslant R \tag{29}$$

с постоянной $C^{(10)} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant I} [\{2^{\lambda_i} - 1\}^{-1} 2^{\lambda_i}]$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.9 [1, гл. 10].

Следствие 1. Пусть выполнены условия а), б), $k > 0$. Тогда с некоторыми постоянными $C^{(11)}$, $C^{(12)}$ для решения $v(x, k)$ задачи (1), (2) выполнены оценки

$$v(x, k) \leqslant C^{(11)} k \left(\frac{H}{|x'|}\right)^{\frac{n-t}{m-1}} \left(\frac{d}{|x'|}\right)^{\frac{t-m}{m-1}} \quad \text{при } k > d,\ x \in \Omega, \tag{30}$$

$$v(x, k) \leqslant C^{(12)} k \left(\frac{H}{|x'|}\right)^{n-t} \left(\frac{d}{|x'|}\right)^{t-2} \quad \text{при } k \leqslant d,\ x \in \Omega. \tag{31}$$

5. Введем при произвольных положительных числах K, r, μ, h, η и постоянных n, m, k, d, имеющих то же значение, что и выше, обозначения

$$R^{(1)}_{r,\mu}(K, h, \eta) = K\mu k^{m-1} h^{n-t} d^{t-m} + \mu^m h^{n-t-m} \left\{ K k \mu^{-1} \left(\frac{h}{r}\right)^{\frac{n-t}{m-1}} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{d}{r}\right)^{\frac{t-m}{m-1}} \right\}^{q(m-1)} r^t + \mu^2 h^{n-t-2} \left\{ K k \mu^{-1} \left(\frac{h}{r}\right)^{\frac{n-t}{m-1}} \left(\frac{d}{r}\right)^{\frac{t-m}{m-1}} \right\}^q r^t, \tag{32}$$

$$R^{(2)}_{r,\mu}(K, h, \eta) = K\mu k h^{n-t} d^{t-2} + \mu^m h^{n-t-m} \left\{ K k \mu^{-1} \left(\frac{h}{r}\right)^{n-t} \left(\frac{d}{r}\right)^{t-2} \right\}^{q(m-1)} r^t +$$
$$+ \mu^2 h^{n-t-2} \left\{ K k \mu^{-1} \left(\frac{h}{r}\right)^{n-t} \left(\frac{d}{r}\right)^{t-2} \right\}^q r^t. \tag{33}$$

Лемма 8. Пусть выполнены условия а), б) для функций $a_j(x, p)$, $j = 1, \ldots, n$; $k > 0$ и пусть $v(x, k)$ — решение задачи (1), (2). Существуют положительные числа K_4, K_5, K_6, K_7, зависящие лишь от n, m, γ_1, γ_2, такие, что из справедливости при некоторых $\bar{r} \in [8d, 1]$, $h \in (0, H]$ оценок

$$v(x, k) \leqslant K_4 k \left(\frac{h}{|x'|}\right)^{\frac{n-t}{m-1}} \left(\frac{d}{|x'|}\right)^{\frac{t-m}{m-1}}, \quad k > d, \tag{34}$$

$$v(x, k) \leqslant K_5 k \left(\frac{h}{|x'|}\right)^{n-t} \left(\frac{d}{|x'|}\right)^{t-2}, \quad k \leqslant d, \tag{35}$$

для $x \in \Omega$, $|x'| \leqslant \bar{r}$, и оценок

$$I_{r,\mu}(h, \eta) \leqslant R^{(1)}_{r,\mu}(K_6, h, \eta), \quad k > d, \tag{36}$$

$$I_{r,\mu}(h, \eta) \leqslant R^{(2)}_{r,\mu}(K_6, h, \eta), \quad k \leqslant d \tag{37}$$

для $2d \leqslant r \leqslant \bar{r}$ при $0 < \mu < k - m_r$, $|\eta| \leqslant 1$ и неравенства

$$K_7 \bar{r} \leqslant h \tag{38}$$

следуют оценки

$$v(x, k) \leqslant K_4 k \left(\frac{h}{2|x'|}\right)^{\frac{n-t}{m-1}} \left(\frac{d}{|x'|}\right)^{\frac{t-m}{m-1}}, \quad k > d, \tag{39}$$

$$v(x, k) \leqslant K_5 k \left(\frac{h}{2|x'|}\right)^{n-t} \left(\frac{d}{|x'|}\right)^{t-2}, \quad k \leqslant d, \tag{40}$$

для $|x'| \leqslant \frac{\bar{r}}{2}$,

$$I_{r,\mu}\left(\frac{h}{2}, \eta\right) \leqslant R^{(1)}_{r,\mu}\left(K_6, \frac{h}{2}, \eta\right), \quad k > d, \tag{41}$$

$$I_{r,\mu}\left(\frac{h}{2}, \eta\right) \leqslant R^{(2)}_{r,\mu}\left(K_6, \frac{h}{2}, \eta\right), \quad k \leqslant d \tag{42}$$

для $2d \leqslant r \leqslant \bar{r}$.

При доказательстве леммы 8 используются теорема 3, леммы 6 и 1.6 гл. 8 [1].

Теорема 1 доказывается аналогично теореме 2 по-разному в каждом из случаев $k > d$ и $k \leqslant d$. При этом используются леммы 5 и 8 и оценка $v(x, k) \leqslant k$.

1. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач.— М. : Наука, 1990.— 476 с.
2. *Skrypnik I. V.* Nonlinear elliptic boundary value problems.— Leipzig : BSB Teubner, 1986.— 232 s.

Донецк. ун-т Получено 25.10.90